

Asociación estudiantil de ingeniería física(AEIF)

Página web



Divulgación

La hipótesis de Riemann

Por Iván Reyna 03/12/2023

En el año 2000 la fundación Clay de matemáticas fundó los 7 problemas del milenio, los cuales tienen una recompensa de un millón de dólares para la persona que logre resolver un problema, en los que se encuentran: P vs NP, La conjetura de Birch y Swinnerton-Dyer, Yang-Mills y el salto de masa, Las ecuaciones de Navier-Stokes, La conjetura de Hodge, La hipótesis de Riemann y la Conjetura de Poincaré.

En este artículo se profundizará la hipótesis de Riemann formulada por el matemático Bernhard Riemann en el año 1859, describe la cantidad de números primos de un intervalo. Dichos números primos tienen relación con la función zeta de Riemann; la cual tiene dos tipos de ceros, los ceros triviales y los ceros no triviales. Aproximadamente se han calculado diez billones de ceros no triviales y nadie ha podido demostrar que por lo menos un cero esté fuera de la línea de $1/2$ o en su defecto nadie ha demostrado que todos los ceros existentes se encuentra en dicha línea.

La hipótesis de Riemann como problema del milenio.

La hipótesis de Riemann, formulada por el matemático Bernhard Riemann en el año de 1859, siendo el ojo de muchos otros matemáticos por su estrecha relación que tiene con la distribución de los números primos con la función zeta de Riemann.

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \dots$$

- **Ceros triviales.** Son los ceros que se obtienen al hacer cero la función seno, los cuales son todos los pares negativos reales, es decir $(-2, -4, -6, -8, -10, \dots)$. Siendo $\zeta(2n)=0$, donde n no puede ser igual a cero ya que la función zeta no está definida en ese eje.

- **Ceros no triviales.** Punto del plano complejo cuya parte real se encuentra entre $0 < \text{Re} < 1$. Estos ceros se encuentran en el eje de $1/2$ también llamada línea crítica.

- **Banda crítica.** Rango de la función que se encuentra entre dos puntos que divergen la función zeta, es decir $0 < \text{Re} < 1$.

Si la función la consideramos $\zeta(s)=0$, entonces la función diverge.

$$\zeta(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^0} = 1 + \frac{1}{2^0} + \frac{1}{3^0} + \dots = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \dots = 1 + 1 + 1 + \dots = \infty$$

Si la función la consideramos $\zeta(s)=1$, entonces la función diverge.

$$\zeta(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^1} = 1 + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{3^1} + \dots = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots = \infty$$

“La parte real de todo cero no trivial de la función zeta $\zeta(s)$ es $\frac{1}{2}$ ”

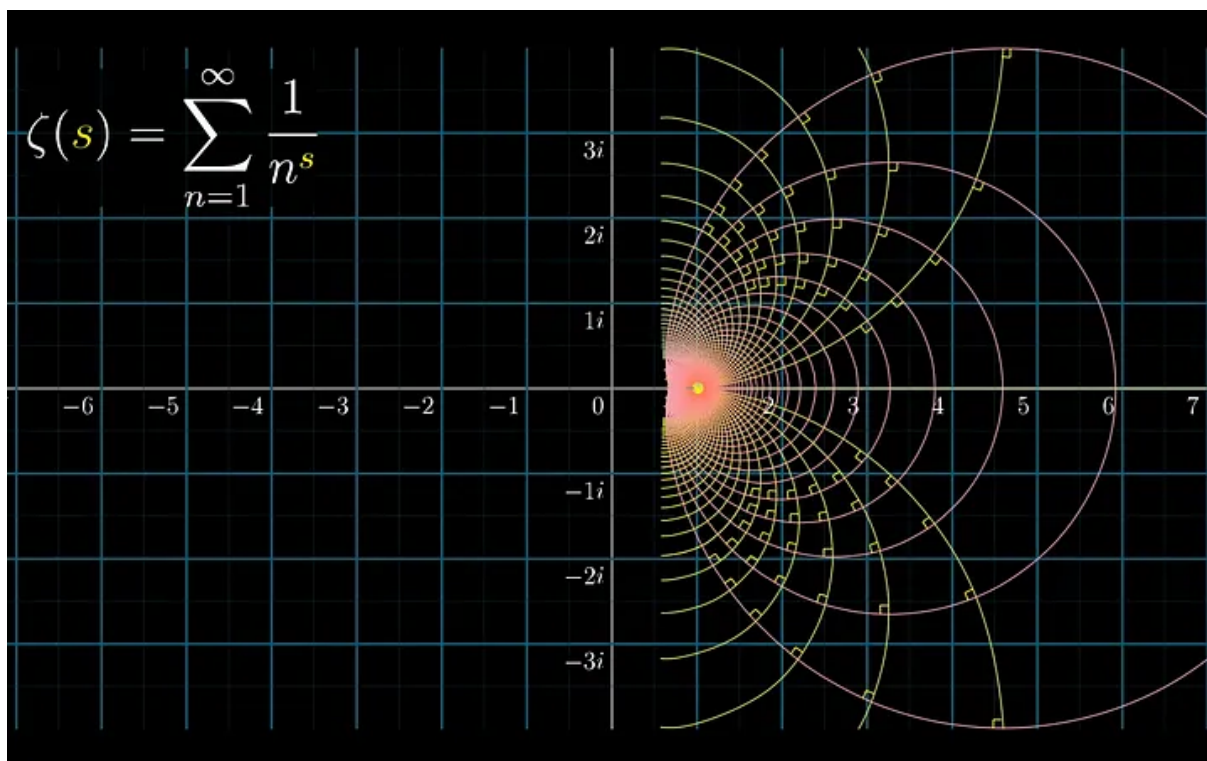
Bernhard Riemann

Definición zeta para valores mayores que 1.

En el plano complejo, la función zeta de Riemann está definida por la siguiente ecuación.

Siendo esta serie estrictamente para valores $\text{Re} > 1$, rango en donde la serie converge en todos los puntos del plano

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{\text{primo}} \frac{1}{1 - p^{-s}}$$



Demostración.

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \dots$$

$$\frac{1}{2^s} \zeta(s) = \frac{1}{2^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{6^s} + \frac{1}{8^s} + \frac{1}{10^s} + \frac{1}{12^s} + \dots$$

$$\left(1 - \frac{1}{2^s}\right) \zeta(s) = 1 + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{7^s} + \frac{1}{9^s} + \frac{1}{11^s} + \frac{1}{13^s} + \dots$$

$$\left(\frac{1}{3^s}\right) \left(1 - \frac{1}{2^s}\right) \zeta(s) = \frac{1}{3^s} + \frac{1}{9^s} + \frac{1}{15^s} + \frac{1}{21^s} + \frac{1}{27^s} + \frac{1}{33^s} + \dots$$

$$\left(1 - \frac{1}{3^s}\right) \left(1 - \frac{1}{2^s}\right) \zeta(s) = 1 + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{7^s} + \frac{1}{11^s} + \frac{1}{13^s} + \frac{1}{17^s} + \frac{1}{19^s} + \dots$$

$$(\dots) \left(1 - \frac{1}{13^s}\right) \left(1 - \frac{1}{11^s}\right) \left(1 - \frac{1}{7^s}\right) \left(1 - \frac{1}{5^s}\right) \left(1 - \frac{1}{3^s}\right) \left(1 - \frac{1}{2^s}\right) \zeta(s) = 1$$

$$\zeta(s) = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2^s}\right) \left(1 - \frac{1}{3^s}\right) \left(1 - \frac{1}{5^s}\right) \left(1 - \frac{1}{7^s}\right) \left(1 - \frac{1}{11^s}\right) \left(1 - \frac{1}{13^s}\right) (\dots)} = \prod_{\text{primo}} \frac{1}{1 - p^{-s}}$$

Como funcionan las potencias complejas.

Definamos $s = \text{Re} + ti$, donde Re y t son dos números reales y donde i es la unidad imaginaria.

Para $s=2$

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots$$

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots$$

Podemos observar que es el problema de Basilea.

Para $s=2+i$

$$\zeta(2+i) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2+i}} = 1 + \frac{1}{2^{2+i}} + \frac{1}{3^{2+i}} + \frac{1}{4^{2+i}} + \dots$$

$$\zeta(2+i) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2+i}} = 1 + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2^i} + \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{3^i} + \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{4^i} + \dots = 1 + \frac{1}{4} \cdot 2^{-i} + \frac{1}{9} \cdot 3^{-i} + \frac{1}{16} \cdot 4^{-i}$$

$$\zeta(2+i) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2+i}} = 1 + \frac{1}{4} \cdot [\cos(\ln(2)) - i \sin(\ln(2))] + \frac{1}{9} \cdot [\cos(\ln(2)) - i \sin(\ln(2))]$$

$$\zeta(2+i) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2+i}} = 1.15 - 0.44i$$

Definición zeta para valores menores que 0.

La sumatoria solo sirve para valores mayores que 1, más sin embargo se puede expandir el rango de la función usando la extensión analítica de funciones.

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin\left(\frac{\pi}{2}s\right) \Gamma(1-s) \zeta(1-s)$$

La siguiente ecuación nos permite explorar el plano para valores menores de cero, donde necesitamos $\sum_{n=1}^{\infty}$ para evaluar $\zeta(1-s)$.

Ceros triviales

En la ecuación se encuentra la función "sin($\pi s/2$)" con rango $\{\text{Re}(s) < 0\}$, entonces se deduce que todos los pares negativos hacen cero la función zeta de Riemann (-2,-4,-6,-8,-10, ...). Siendo $\zeta(2n)=0$, donde n no puede ser igual a cero ya que la función zeta no está definida en ese eje.

Definición zeta para ciertos valores.

Definición zeta para valores pares de s , $K \in \mathbb{N}$.

$$\zeta(2k) = \frac{(-1)^{k-1} (2\pi)^{2k} (B_{2k})}{2(2k)!}$$

Definición zeta para valores enteros negativos de s , $K \in \mathbb{N}$.

$$\zeta(-k) = -\frac{B_{K+1}}{k+1}$$

Definición zeta para valores entre la banda crítica.

En la banda crítica no existe una ecuación que nos ayude a visualizar la función, ni siquiera usando la extensión analítica, pero se pueden obtener valores a base de métodos numéricos.

Supongamos $s=1/2$

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin\left(\frac{\pi}{2}s\right) \Gamma(1-s) \zeta(1-s)$$

$$\zeta\left(\frac{1}{2}\right) = 2^{\frac{1}{2}} \pi^{-\frac{1}{2}} \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \zeta\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\zeta\left(\frac{1}{2}\right) = (\sqrt{2}) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdot (\sqrt{\pi}) \cdot \zeta\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\zeta\left(\frac{1}{2}\right) = \zeta\left(\frac{1}{2}\right)$$

Donde $s=1/2$, se le conoce como línea crítica, donde únicamente se varían los parámetros del número imaginario para obtener la evaluación que haga 0 la función zeta de Riemann (ceros no triviales). También podemos observar que en el punto $s=1/2$, no hace 0 la función zeta.

Ceros no triviales

No existe una ecuación directa que nos ayude encontrar dichos ceros, pero podemos aproximarnos mediante métodos numéricos y para demostrar la validez de un punto ya obtenido, se puede utilizar la función de Riemann-Siegel.

“La parte real de todo cero no trivial de la función zeta $\zeta(s)$ es $\frac{1}{2}$ ”

Bernhard Riemann

Riemann-Siegel.

$$\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) = e^{-i\theta(t)} \left(\sum_{n=1}^{\sqrt{\frac{t}{2\pi}}} \frac{\cos(\theta(t) - t \cdot \ln(n))}{\sqrt{n}} + R \right)$$

$$\theta(t) = \frac{t}{2} \left(\ln\left(\frac{t}{2\pi}\right) \right) - \frac{t}{2} - \frac{\pi}{8} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2^{2n-1} - 1) |B_{2n}|}{2^{2n} (2n-1)(2n)} \cdot \frac{1}{t^{2n-1}}$$

$$R(-1)^{N-1} \left(\frac{2\pi}{t}\right)^{\frac{1}{4}} \left[C_0 - C_1 \left(\frac{2\pi}{t}\right)^{\frac{1}{2}} + C_2 \frac{2\pi}{t} - C_3 \left(\frac{2\pi}{t}\right)^{\frac{3}{2}} \right]$$

$$C_0 = \Psi(P) = \frac{\cos\left(2\pi\left(P^2 - P - \frac{1}{16}\right)\right)}{\cos 2\pi P}$$

$$C_1 = \frac{1}{96\pi^2} \cdot \frac{d^3}{dP^3} \Psi(P)$$

$$C_2 = \frac{1}{96^4} \cdot \frac{d^6}{dP^6} \Psi(P) + \frac{1}{64\pi^2} \cdot \frac{d^2}{dP^2} \Psi(P)$$

$$C_3 = \frac{1}{5308416\pi^6} \cdot \frac{d^9}{dP^9} \Psi(P) + \frac{1}{3840\pi^4} \cdot \frac{d^5}{dP^5} \Psi(P) + \frac{1}{64\pi^2} \cdot \frac{d}{dP} \Psi(P)$$

$$N = \sqrt{\frac{t}{2\pi}} \rightarrow \text{Parte entera.}$$

$$p = \sqrt{\frac{t}{2\pi}} \rightarrow \text{Parte decimal.}$$

Aplicaciones de la función zeta de Riemann.

Sabiendo que la función zeta de Riemann tiene una pequeña correlación con los números primos, siendo de mayor importancia para la teoría de números, donde podemos determinar el número de primos por debajo de un intervalo.

$$\pi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} R(x^{\frac{1}{n}})$$

donde $\pi(x)$ es una función para calcular los números primos.

Para R

$$R(x) = li(x) - \log(2) - \sum_p li(x^p) + \int_x^{\infty} \frac{1}{t(t^2 - 1)\log(f)}$$

donde p son los ceros no triviales.

x	(x)	(x)-x/ln(x)	li(x) - (x)
10	4	-0.3	2.2
10 ²	25	3.3	5.1
10 ³	168	23	10
10 ⁴	1,229	143	17
10 ⁵	9,592	906	38
10 ⁶	78,498	6,116	130
10 ⁷	664,579	44,158	339
10 ⁸	5,761,455	332,774	754
10 ⁹	50,847,534	2,592,592	1,701
10 ¹⁰	455,052,511	20,758,029	3,104

Tabla1. Comparación entre la cantidad de números primos por las aproximaciones del logaritmo integral y por la función zeta de Riemann.